VIZSGADOLGOZAT

Többvált. fv.tan, 2013. 01. 15.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x,y) := 4xy - x^4 - y^4$ függvény szélsőértékeit. (6 pont)

2. Ábrázolja az integrációs tartományt, cserélje föl az integráció sorrendjét és számolja ki az integrált: (9 pont)

$$\int_0^1 \Big(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \Big)\,dy$$

3. Számolja ki az alábbi határértéket (6+5 pont)

$$\text{a)} \quad (1+x^2y^2)^{-1/(x^2+y^2)} \quad ((x,y)\to(0,0)) \qquad \text{b)} \quad \frac{\sin xy}{x} \quad ((x,y)\to(0,2))$$

4. Legyen $f(x,y) := \begin{cases} \frac{y^2}{x^4}, & \text{ha } |y| < x^2, \\ 1, & \text{különben.} \end{cases}$ Bizonyítsa be, hogy f a $(0,0)$ pontban nem folytonos, de minden irány szerint differenciálható. Differenciálható-e a függvény az origóban parciálisan, illetve totálisan? (11 pont)

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $2y + xy^3 + (x + x^2y^2)y' = 0$ differenciálegyenletet! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Young tételt (kétváltozós függvényekre elegendő).

2. Mondja ki a vonalintegrál útfüggetlenségének feltételét (a parcális deriváltakkal).

3. Mit ért az alatt, hogy az f függvény az $[a,b]$ intervallumon korlátos változású?

4. Mit ért az alatt, hogy az f függvény az $a \in \mathbb{R}^k$ pontban (totálisan) differenciálható?

5. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt (az $f(x,y,z) = 0$ által definiált $z = z(x,y)$ függvényre).

6. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt (kétváltozós függvényekre elegendő kimondani).

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Tekintsük az $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ integrált, ahol D az $a \le x \le b$, $\alpha x \le y \le \beta x$, $a, b, \alpha, \beta > 0$ tartomány. Adjon meg olyan transzformációt, amely D-t téglalappá transzformálja. Írja föl a transzformált integrált.

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, ha a) egy tartomány *nem* csillagszerű; b) egy tartomány *nem* összefüggő.

3. Adjon meg olyan F_n (síkbeli) halmazsorozatot, hogy minden n értékre $F_n \subseteq F_{n+1}$ és F_n Jordan-mérhető, de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ nem Jordan-mérhető.

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!