

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2013. 01. 09.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x, y) := x^2 - xy + y^2$ függvény szélsőértékeit az $|x| + |y| \leq 1$ (zárt) négyzeten. (11 pont)
2. Legyen $f(x, y) := \sqrt{x^y + 1}$. Adja meg a függvényfeszínhez a $(2, 3)$ pontban húzható érintő egyenletét. Melyik irányban minimális az iránymenti derivált? (6 pont)
3. Számolja ki az $\iint_D \cos 2x + \sin y \, dx \, dy$ integrált, ahol D az $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y = \pi$ egyenesek által határolt háromszög. (6 pont)
4. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat: (5+6 pont)
 - a) $\int_L (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$, ahol L az $y = x^2$ parabola $-1 \leq x \leq 1$ íve.
 - b) $\int_L (x^2 + 2xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy - y^2) \, dy$, ahol L az $y = \log x$ görbe $1 \leq x \leq e^2$ íve.
5. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy f a $(0, 0)$ pontban nem folytonos, de minden $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ esetén $f(t \cdot \mathbf{e}) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow 0$. Differenciálható-e a függvény az origóban parciálisan, illetve totálisan? (11 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja a kompakt halmaz fogalmát. Melyek \mathbb{R}^k -ban a kompakt halmazok?
2. Mondja ki a (kétváltozós) függvény szélsőértéke létezésének elegendő feltételét.
3. Mit ért az alatt, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon korlátos változású?
4. Mondja ki a szukcesszív integrálásról szóló tételt.
5. Definiálja a belső sokszög és a (Jordan-féle) belső mérték fogalmát.
6. Mondja ki az összetett függvény parciális differenciálhatóságáról szóló tételt (kétváltozós függvényekre elegendő kimondani).

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Számolja ki az $\iint_D [x + y] \, dx \, dy$ integrált, ahol D a $0 \leq x, y \leq \frac{3}{2}$ tartomány és $[\cdot]$ az egészrész-függvény.
2. Igazolja, hogy a sík pontjainak halmazán $d(P, Q) := \begin{cases} 1, & \text{ha } P \neq Q, \\ 0, & \text{ha } P = Q \end{cases}$ egy távolság-függvény. Melyek a konvergens sorozatok? Melyek a zárt halmazok?
3. Van-e olyan nem-Jordan-mérhető korlátos halmaz, amelynek a) belseje; b) lezártja; c) határa mérhető?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!