

VIZSGADOLGOZAT
Többvált. fv.tan, 2012. 12. 18.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x, y) := \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ függvény szélsőértékeit a $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$ (zárt) négyzeten. (12 pont)

2. Számolja ki az

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} dx dy$$

integrált, ahol D az $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq x, y$ tartomány. (8 pont)

3. Vizsgálja a $\sqrt[3]{xy}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát! (12 pont)

5. Számolja ki a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

határértéket. (6 pont)

6. Legyen $f(x, y) := \sqrt{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$. Hol folytonos ez a függvény? Ábrázolja az értelmezési tartományt. Vizsgálja a függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban. (7 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja az irány szerinti derivált fogalmát.
2. Mondja ki a (kétváltozós) függvény szélsőértéke létezésének elegendő feltételét.
3. Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségének feltételét (a parciális deriváltakkal).
4. Mondja ki Young-tételt.
5. Definiálja az $\int_G P(x, y) dx$ vonalmenti integrált.
6. Mondja ki az implicitfüggvény tételt az $f(x, y, z) = 0$ implicit egyenlettel meghatározott $z = z(x, y)$ függvényre.

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Határozza meg a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \iint_{K_r} e^{x^2 + \cos y} dx dy$$

határértéket; K_r az origó körüli r sugarú körlap.

2. Távfogalomdefiníció-e az \mathbb{R} halmazon a $d(x, y) := \left| \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \right|$ kifejezés?

3. Van-e olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, amely torlódási pontjainak halmaza a) nyílt; b) zárt?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!