

VIZSGADOLGOZAT

Többsvált. fv.tan, 2012. 12. 11.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x, y) := e^{x^2-y}(5 - 2x - y)$ függvény szélsőértékeit. (9 pont)

2. Számolja ki az

$$\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$$

integrált, ahol D az $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x$ tartomány. (9 pont)

3. Vizsgálja a $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ függvény parciális és totális differenciálhatóságát! (12 pont)

4. Számolja ki az

$$\int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

integrált, ahol az L az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipszis $(0, 4)$ -ből $(3, 0)$ -ba vezető (rövidebb) íve. (9 pont)

5. Számolja ki a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y^2}{1 + (x - y)^4}$$

határértéket. (6 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Definiálja a kompakt halmaz fogalmát! Melyek \mathbb{R}^k -ban a kompakt halmazok?
- Definiálja egy $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz külső és belső sokszögeinek fogalmát.
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény (totálisan) differenciálható az $A \in \mathbb{R}^k$ pontban?
- Mondja ki a parciális deriváltakkal való függvényelőállításról szóló tételt.
- Definiálja az $\int_G P(x, y) dx$ vonalintegrált.
- Mondja ki a (kettős) integrál szukcesszív kiszámításáról szóló tételt.

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Határozza meg a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{K_r} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

határértéket; K_r az origó körüli r sugarú kör (pozitív irányításban).

2. Igazolja, hogy egy „síma” (kétváltozós) függvény valamely ponton átmenő szintvonala és gradiensvektora merőlegesek.

3. Van-e olyan nem-Jordan-mérhető korlátos halmaz, amelynek a) belseje; b) lezártja; c) határa mérhető?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!