

**Vizsgadolgozat**  
(Mat. alapszak)  
(Differenciál és integrálszámítás)

Név:.....

Vizsgáztató neve:.....

**A) Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi integrálokat!

$$\text{a) } \int \operatorname{tg}^7 x dx; \quad \text{b) } \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad (5 \text{ p} + 7 \text{ p})$$

2. Határozza meg a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$  sor összegfüggvényét! Adja meg a konvergencia-intervallumot is! (10 p)

3. Határozza meg a következő határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin \frac{1}{x}} \quad (10 \text{ p})$$

4. Végezze el az  $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$  függvény teljes vizsgálatát és ábrázolja a grafikont! (13 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

**B) Definíciók, tételek**

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény konkáv az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon? (4 p)

2. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  és  $g$  függvények lineárisan függők az  $(a, b)$  intervallumon? (4 p)

3. Mondja ki a differenciálható függvény monoton növekedése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tételt! (4 p)

4. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt! (4 p)

5. Mondja ki a függvénysorozatok határfüggvényének Riemann-integrálhatóságáról szóló tételt! (4 p)

6. Mondja ki a Newton–Leibniz-féle formulát! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

**C) Elméleti kérdések**

1. Igaz-e, hogy ha  $f \cdot g$  és  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, akkor  $g$  is differenciálható  $x_0$ -ban? (Indokolja a választ!) (3 p)

2. Konstruáljon olyan  $f$  függvényt, amelyre igaz, hogy  $f$  differenciálható  $x_0$ -ban, de  $f''$  nem létezik  $x_0$ -ban! (4 p)

3. Legyen  $f$  differenciálható  $[a, b]$ -n. Igaz-e, hogy  $f'(x)$  integrálható  $[a, b]$ -n? (7 p)

4. Igaz-e, hogy ha  $f$  és  $g$  impropriusan integrálhatók az  $[1; \infty)$ -on, akkor  $f \cdot g$  is impropriusan int. ezen az intervallumon? (7 p)