

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
(Differenciál és integrálszámítás)

Név:.....

Vizsgáztató neve:.....

A) Feladatok

1. Határozza meg a következő integrálokat!

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^4 x}; \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx \quad (6 \text{ p} + 6 \text{ p})$$

2. Hol differenciálható a következő függvény? Ahol differenciálható, ott számolja ki a deriváltat!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (10 \text{ p})$$

3. Számolja ki a következő határértéket!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \operatorname{ctg} \frac{1}{n} \right) \quad (10 \text{ p})$$

4. Végezze el az $f(x) = xe^{-1/x}$ függvény teljes vizsgálatát és ábrázolja a grafikont! (13 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

B) Definíciók, tételek

1. Mondja ki az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt! (4 p)

2. Mondja ki a L'Hopital-szabályt (végesben $\frac{0}{0}$ alak)! (4 p)

3. Mit jelent az, hogy a derivált függvény rendelkezik Bolzano—Darboux-féle tulajdonsággal? (4 p)

4. Hogy szól az oszcillációs kritérium? (4 p)

5. Fogalmazza meg az integrálfüggvény differenciálására vonatkozó tételt! (4 p)

6. Fogalmazza meg a lineáris másodrendű homogén differenciálegyenletek megoldáshalmazának szerkezetére vonatkozó tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

C) Elméleti kérdések

1. Vizsgálja az A/2 feladatban szereplő függvény deriváltját! (Folytonos-e a 0-ban, s ha nem, akkor milyen típusú szakadása van?) (3 p)

2. Az $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy a $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^{\omega} f(x) dx$ létezik. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$? (4 p)

3. Az f függvényről tudjuk, hogy folytonos a $[-1; 1]$ -n differenciálható $(-1; 1)$ -en és $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy mindig található olyan a, b számok, $-1 \leq a < 0 < b \leq 1$, amelyekre $f(a) = f(b)$ fennáll? (7 p)

4. Legyen f folytonos $(0, 1)$ -en. Konvergense-e az $f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t) dt$ függvény sorozat? (7 p)

21 p

Σ **90 p**