

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
(Differenciál és integrálszámítás)

Név:.....

Vizsgáztató neve:.....

A) Feladatok

1. a) Határozza meg az $y = xe^x$ grafikon $[0, 1]$ feletti ívének az x tengely körüli megforgatásával keletkezett test térfogatát! (8 pont)

b) $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = ?$ (6 pont)

2. Határozza meg az $f(x) = x \cos 3x$ függvény Taylor-sorát! Hol konvergens ez a sor? (10 p)

3. Számolja ki a következő határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) \ln(1-x). \quad (8 \text{ p})$$

4. Végezze el az $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ függvény teljes vizsgálatát és ábrázolja a grafikon! (13 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

B) Definíciók, tételek

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény az a helyen differenciálható? (4 p)

2. Mit ért az alatt, hogy az f és g függvények lineárisan függőek az (a, b) intervallumon? (4 p)

3. Mondja ki a hányadosfüggvény deriválhatóságára és deriváltjára vonatkozó tételt! (4 p)

4. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) integrálkritériumot! (4 p)

5. Definiálja a Darboux-féle alsó- és felső közelítő összeg, ill. az alsó- és felső integrál fogalmát! (4 p)

6. Definiálja az improprius integrál fogalmát (elég a jobb oldali alapeset)! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

C) Elméleti kérdések

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban) az oszcillációs kritériumban levő " $\forall \varepsilon (> 0)$ -hoz..." kezdetű állítás tagadását! (3 p)

2. Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható a $[-1, 1]$ intervallumon és legyen $I(x) := \int_{-1}^x f(t) dt$. Igaz-e, hogy $I(x)$ differenciálható a 0 pontban és $I'(0) = f(0)$? (4 p)

3. Adjon meg olyan függvényt, amely folytonos a $(0, 1)$ intervallumon és ennek az intervallumnak végtelen sok pontjában nem differenciálható! (7 p)

4. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Riemann-integrálható-e ez a függvény? (7 p)

21 p
 Σ 90 p