

Név: .....

Vizsgáztató neve: .....

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2011. 01. 25.

### A. Feladatok

1. Adja meg az  $f(x) := \sqrt{\ln \sin x} + \ln(3 - x^2)$  függvény értelmezési tartományát és érték-készletét! (9 pont)

2. Határozza meg az alábbi határértékeket! (8 + 8 pont)

$$\text{a) } \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \rightarrow? \quad (x \rightarrow 0)$$

3. Hol konvergens az

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x > -1)$$

függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Ábrázolja a határfüggvényt! (10 pont)

4. Hol konvergens az alábbi hatványsor? (10 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$$

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Cauchy-féle konvergencia-kritériumot számsorozatokra!
2. Definiálja két sor Cauchy-szorzatát és mondja ki a rá vonatkozó tételt!
3. Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Mit ért  $e^x$ -en?
4. Mondja ki az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!
5. Definiálja adott függvény inverzét!
6. Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Hol folytonos az  $f(x) := [x] \sin(\pi x)$  függvény?
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium tagadását! (A  $\sum a_n$  sor *nem* konvergens ...)
3. Az  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvényről tudjuk, hogy ÉT-án folytonos és hogy  $f(x) \rightarrow 0$ , ha  $x \rightarrow \infty$ . Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen egyenletesen is folytonos (az ÉT-án)?
4. Az  $a_n$  pozitív tagú sorozatrol tudjuk, hogy  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0,314$ . Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!