

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
Bevezetés az analízisbe

Név:

Vizsgáztató neve:

A) Feladatok

1. Adja meg az $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x-5|}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Hol folytonos ez a függvény? (10 p)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1-n^3} + n$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$; (8 p + 8 p)

3. Konvergens-e a következő sor? Abszolút konvergens-e?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}}{n^4} \quad (11 \text{ p})$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = ? \quad (8 \text{ p})$$

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 45 p

B) Definíciók, tételek

1. Definiálja, hogy mit ért azon, hogy egy f függvénynek a $+\infty$ -ben a határértéke c ? (Mindkét definíciót adja meg!) (4 p)

2. Mondja ki a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot! (4 p)

3. Definiálja azt, hogy egy f_n függvényt sorozat egyenletesen konvergens egy I intervallumon! (4 p)

4. Mondja ki a számsorok konvergenciájára vonatkozó gyökkritériumot! (4 p)

5. Fogalmazza meg a konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tételt! (4 p)

6. Adja meg a torlódási pont mindkét definícióját! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) 24 p

C) Elméleti kérdések

1. Abból, hogy $0 < a_n \rightarrow 0$, következik-e, hogy $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$? (3 p)

2. Van-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2011? (4 p)

3. Mutassa meg, hogy ha f folytonos és monoton növvő a $[0; \infty)$ -en és korlátos, akkor egyenletesen folytonos ezen az intervallumon! (7 p)

4. Mutassa meg, hogy ha $n \cdot a_n \rightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sor konvergens! (7 p)

21 p