

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
Bevezetés az analízisbe

Név:

Vizsgáztató neve:

A) Feladatok

1. Adja meg az $f(x) = \sqrt{2 \log_2(x-4) - 2 \log_2(x-5)}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
Hol folytonos? (10 p)

2. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n - n \cdot 3^n}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{4}{n}}{\sin \frac{3}{n}}$. (7 p + 8 p + 8 p)

3. Határozza meg a következő sorok összegét!

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{2} + 1} \right)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. (5 p + 7 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 45 p

B) Definíciók, tételek

1. Mondja ki a rendőrelvre vonatkozó tételt! (4 p)
2. Adja meg annak a definícióját, hogy egy a_n sorozat $+\infty$ -divergens! (4 p)
3. Mondja ki Riemann tételét a feltételesen konvergens sorok átrendezhetőségéről! (4 p)
4. Mit ért azon, hogy egy f függvény egy $[a, b]$ intervallumon egyenletesen folytonos? (4 p)
5. Mit ért $\arccos x$ -en? (4 p)
6. Adja meg annak a definícióját, hogy mit jelent az, hogy egy f függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$! (Mindkét definíciót adja meg!) (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) 24 p

C) Elméleti kérdések

1. Legyen az f függvény értelmezve az x_0 valamely környezetében. Mit jelent az, hogy f nem folytonos az x_0 -ban? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!) (3 p)
2. Legyen $\forall n$ -re $a_n \geq 0$. Igaz-e, hogy ha $\forall n$ -re $\sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens? (4 p)
3. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak nincs $+\infty$ -be tartó részsorozata, akkor felülről korlátos? (7 p)
4. Van-e olyan függvény, amely mindenütt értelmezett a $[0; 1]$ -en, de annak bármely pontja bármely környezetében nem korlátos? (7 p)

21 p