

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
Bevezetés az analízisbe

A) Feladatok

1. Adja meg az $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x+3}{x-3}}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Hol folytonos ez a függvény? (10 p)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n - 4^n + 5^n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n$; (7 p + 7 p)

3. Jellemezze az alábbi függvény szakadási helyeit!

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}. \quad (8 \text{ p})$$

4. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}. \quad (13 \text{ p})$$

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 45 p

B) Definíciók, tételek

1. Definiálja, hogy mit jelent az, hogy az a_n sorozat határértéke az a szám (legalább két definíciót adjon meg)! (4 p)

2. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt! (4 p)

3. Fogalmazza meg a sorokra vonatkozó gyökkritériumot! (4 p)

4. Mondja ki a folytonos függvény inverzére vonatkozó tételt! (4 p)

5. Legyen x egy valós szám. Mit ért e^x -en? (4 p)

6. Mondja ki a hatványsorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) 24 p

C) Elméleti kérdések

1. Igaz-e, hogy ha f és $g(f)$ folytonosak, akkor g is folytonos? (3 p)

2. Van-e az $a_n = (\sin n + \cos n)^{100} \operatorname{arctg} n$ sorozatnak torlódási pontja? (4 p)

3. Van-e olyan polinomokból álló $P_n(x)$ függvénysorozat, amelyre teljesül, hogy a $[-1; 1]$ -on egyenletesen konvergál az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvényhez? (7 p)

4. Igaz-e, hogy ha $0 \leq a_n \rightarrow 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor konvergens? (7 p)

21 p

Σ 90 p