

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
Bevezetés az analízisbe

Név:

Vizsgáztató neve:

A) Feladatok

1. Adja meg az $f(x) = \arccos \log_{1/2}(2 - x^2)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (10 p)

2. Határozza meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^5} + \frac{5}{n^3} + \frac{1}{n^2}}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\lg 7x}$. (7 p + 8 p + 8 p)

3. Adja meg az alábbi hatványsor konvergencia-intervallumát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}. \quad (12 \text{ p})$$

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 45 p

B) Definíciók, tételek

1. Mondja ki a számsorozatok korlátossága és konvergenciája kapcsolatára vonatkozó tételt! (4 p)

2. Hogy szól a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritérium? (4 p)

3. Adja meg a mértani sor definícióját! Mondja ki a mértani sor konvergenciájára vonatkozó tételt! (4 p)

4. Adja meg annak a definícióját, hogy egy f_n függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez egy I intervallumon! (4 p)

5. Adja meg annak a definícióját, hogy egy f függvény az x_0 pontban folytonos (mindkét definíciót adja meg)! (4 p)

6. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságára vonatkozó tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) 24 p

C) Elméleti kérdések

1. Adjon meg olyan számsorozatot, amelynek pontosan 5 torlódási pontja van! (3 p)

2. Igaz-e, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ is az? (4 p)

3. Adjon meg olyan függvényt, amely a $[0; 1]$ -on rendelkezik a $B - D$ tulajdonsággal, mégsem folytonos ezen az intervallumon! (7 p)

4. Legyen $x_1 = 1, x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$. Konvergens-e az x_n sorozat? (7 p)

21 p

Σ 90 p