Neve: ______________________________

EHA: ____________________

Kalkulus informatikusoknak 1, 2017. 01. 24.

Az elégséges érdemjegyhez a feladatrészből legalább 30, a definciórészből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat.**

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n := \frac{3n+5}{7-2n}$ sorozatot. Adjuk meg az $\inf a_n$ s $\sup a_n$ értékeket is. (8 pont)

2. Határozzuk meg a következő határértékeket. (8 pont)

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-3}+1}{\sqrt[3]{n^4}-2n+3} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-3n}{1-3n}\right)^{n+4}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az

$$f(x) := 9\sqrt[3]{x^2} - 2x^3$$

függvényt. (15 pont)

[(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás; (ii) határértékek; (iii) első derivált, monotonitás, szélsőérték; (iv) második derivált, konvexitás, inflexió; (v) függvényábrázolás, értékkészlet.]

4. Határozzuk meg a következő integrálokat. (34 pont)

$$\text{(i)} \int_0^1 (3-u)\ln(2u+3)\,du \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{z-1}{\sqrt{z^2-2z+2}}\,dz \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty xe^{-3x}\,dx$$

* * *

Segédlet:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat. (5×5 pont)

(i) Az (a_n) sorozat részsorozata.

(ii) A $f(x)$ függvény differenciálható a 3 pontban.

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv az $[a, b]$ intervallumon.

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \infty$.

(v) Lagrange-féle maradéktag.