Neve: ______________________________

EHA: ____________________

Kalkulus informatikusoknak 1, 2017. 01. 17.

Az elégséges érdemjegyhez a feladatrészből legalább 30, a defincirészből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat.**

1. Határozzuk meg az $f(x) := \sqrt{x^2 - 2x}$ függvény grafikonjához az $x_0 = -1$ koordinátájú pontban húzott érintő egyenletét. (5 pont)

2. Határozzuk meg a következő határértékeket. (8 pont)

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}-1}{\sqrt[3]{n^4-2n+3}} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-n}{3n+4}\right)^{2n+1}$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$$

függvényt. (18 pont)

[(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás; (ii) határértékek; (iii) első derivált, monotonitás, szélsőérték; (iv) második derivált, konvexitás, inflexió; (v) függvényábrázolás, értékkészlet.]

4. Határozzuk meg a következő integrálokat. (34 pont)

$$\text{(i)} \int_0^{\sqrt{\pi}} 3u \sin u^2 \, du \qquad \text{(ii)} \int_1^3 \frac{z+1}{z^2-z-2} \, dz \qquad \text{(iii)} \int_2^{\infty} \frac{3}{v^2+v+2} \, dv$$

* * *

Segédlet:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x \, dx = e^x + C, \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \, .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat. (5×5 pont)

(i) Az (a_n) sorozat határértéke -1.

(ii) A $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban.

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$ intervallumon.

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 4} f(x) = -\infty$.

(v) Integrálfüggvény.