Neve: ______________________________

EHA: ______________________

Kalkulus informatikusoknak 1, 2017. 01. 10.

Az elégséges érdemjegyhez a feladatrészből legalább 30, a defincórészből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat.**

1. Határozzuk meg az $f(x) := \sqrt[3]{1+x}$ függvény $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor-polinomját. Ennek segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{1.5}$ értékét és a hiba nagyságát. (9 pont)

2. Határozzuk meg a következő határértékeket. (8 pont)

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{8}} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-4}\right)^{1-2n}$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az

$$f(x) := x + e^{-1/x}$$

függvényt. (15 pont)

[(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás; (ii) határértékek; (iii) első derivált, monotonitás, szélsőérték; (iv) második derivált, konvexitás, inflexió; (v) függvényábrázolás, értékkészlet.]

4. Határozzuk meg a következő integrálokat. (33 pont)

$$\text{(i)} \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} v \operatorname{arctg} v\,dv \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{3z+1}{1-z^2}\,dz$$

* * *

Segédlet:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat. (5×5 pont)

(i) A (b_n) sorozat alulról korlátos.

(ii) Az a_0 szám torlódási pontja az (a_n) sorozatnak.

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi minimuma (lokális minimuma) van a 2 pontban.

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{y \to \infty} U(y) = -\infty$.

(v) (Darboux-féle) alsó integrálközelítő összeg (részletesen).