Neve: ______________________________________

EHA: _______________________

Kalkulus informatikusoknak 1, 2017. 01. 03.

Az elégséges érdemjegyhez a feladatrészből legalább 30, a definíciórészből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat.**

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2$, $a_n := \sqrt{6a_{n-1} - 5}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. (8 pont)

2. Határozzuk meg a következő határértékeket. (8 pont)

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^{n-3} - (-1)^n}{n^3 - 4\cdot 2^n}$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az

$$f(x) := x \cdot e^{-1/x^2}$$

függvényt. (15 pont)

[(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás; (ii) határértékek; (iii) első derivált, monotonitás, szélsőérték; (iv) második derivált, konvexitás, inflexió; (v) függvényábrázolás, értékkészlet.]

4. Határozzuk meg a következő integrálokat. (34 pont)

$$\text{(i)} \int_0^1 \sqrt[3]{t} \ln t \, dt \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1+4u}{u^2+1} \, du \qquad \text{(iii)} \int_0^3 \frac{z^3 - 2z + 1}{\sqrt{z}} \, dz$$

* * *

Segédlet:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x \, dx = e^x + C, \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat. (5×5 pont)

(i) A (b_n) sorozat konvergens.

(ii) A $g(t)$ függvény lineárisan approximálható a -2 pontban.

(iii) Az $f(x)$ függvénynek helyi maximuma (lokális maximuma) van az a pontban.

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{y \to -1^-} h(y) = -1$.

(v) Integrálközép.