Neve: ____________________

EHA: ____________________

Kalkulus informatikusoknak 1, 2016. 12. 13.

Az elégséges érdemjegyhez a feladatrészből legalább 30, a definciórészből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat.**

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az

$$a_n := \frac{3n+2}{2n-9}$$

sorozatot. Adjuk meg az $\inf a_n$, $\sup a_n$ értékeket. (8 pont)

2. Határozzuk meg a következő határértékeket. (8 pont)

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^3+n+5}\right) \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{2n-3}\right)^{2n-1}$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az

$$f(x) := \sqrt[3]{x^2}(5-x)$$

függvényt. (15 pont)

[(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás; (ii) határértékek; (iii) első derivált, monotonitás, szélsőérték; (iv) második derivált, konvexitás, inflexió; (v) függvényábrázolás, értékkészlet.]

4. Határozzuk meg a következő integrálokat. (34 pont)

$$\text{(i)} \int_{-2}^{1} \frac{z^2}{\sqrt[3]{z^3+8}}\,dz \qquad \text{(ii)} \int_0^3 \frac{2q-1}{3q+2}\,dq \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty u\,e^{-u^2/2}\,du$$

* * *

Segédlet:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat. (5×5 pont)

(i) Az (x_n) sorozat monoton növekvő.

(ii) Az $f(y)$ függvény differenciálható a -3 pontban.

(iii) A $g(t)$ függvénynek helyi maximuma van a_0-ban.

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{p \to -3^+} h(p) = -5$.

(v) A korlátos D számhalmaz supremuma.