

## VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2014. 06. 24.

### A. Feladatok

1. Határozza meg: (9 + 6 + 5 pont)

$$\text{a) } = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad ? \quad \text{b) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \, dx = ? \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = ?$$

2. Adja meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^n x^n$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét. (6 pont)

3. Legyen  $f(x) := \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ . Adja meg a függvény monotonitási intervallumait, szélsőértékeit (ha vannak), és az értékkészletét. (9 pont)

4. Legyen  $h > -1$ . Igazolja, hogy  $(1+h)^p \leq 1+hp$  pontosan akkor, ha  $0 \leq p \leq 1$ . (5 pont)

### B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mondja ki a középérték-tételt (a Cauchy-féle alakot).
2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálásáról szóló tételt.
3. Mondja ki a függvénysorozat integrálhatóságáról szóló tételt.
4. Mit ért az alatt, hogy két függvény lineárisan független az  $[a, b]$  intervallumon?
5. Mondja ki a Darboux tételt.

### C. További kérdések

1. Igazolja, hogy ha  $f$  integrálható a  $[-1, 1]$ -en, akkor

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx .$$

(5 pont)

2. Adjon meg olyan  $G$  függvényt (ha lehetséges), amelyre minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $G'(x) = x \cdot |x+1|$ . (4 pont)

3. Mutasson példát olyan  $f$  függvényre, amely integrálható a  $[-1, 1]$ -en, és az integrálfüggvénye,  $F(x) := \int_{-1}^x f(t) \, dt$ , nem differenciálható a 0-ban. (5 pont)

4. Igazolja, hogy az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletű görbe (ellipszis) által határolt korlátos zárt síkrész területe  $\pi \cdot ab$ . (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!