

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, 2014. 06. 24.

A. Feladatok

1. Határozza meg: (9 + 7 + 6 pont)

$$\text{a) } = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad ? \quad \text{b) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \, dx = ? \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = ?$$

2. Adja meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 3^n x^n$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét. (7 pont)

3. Legyen $f(x) := \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Adja meg a függvény monotonitási intervallumait, szélsőértékeit (ha vannak), és az értékkészletét. (11 pont)

B. Definíciók, tételek (5 × 4 pont)

1. Mondja ki a középérték-tételt (a Lagrange-féle alakot).
2. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálásáról szóló tételt.
3. Definiálja az improprius integrált (elég a „jobboldali alapeset”).
4. Mit ért az alatt, hogy két függvény lineárisan független az $[a, b]$ intervallumon?
5. Mondja ki a Darboux tételt.

C. További kérdések

1. Adjon meg olyan sehol sem differenciálható függvényeket, melyek összetétele mindenütt differenciálható. (3 pont)
2. Adjon meg olyan G függvényt (ha lehetséges), amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $G'(x) = x \cdot |x + 1|$. (4 pont)
3. Mutasson példát olyan f függvényre, amely integrálható a $[-1, 1]$ -en, és az integrálfüggvénye, $F(x) := \int_{-1}^x f(t) \, dt$, nem differenciálható a 0-ban. (6 pont)
4. Igazolja, hogy az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű görbe (ellipszis) által határolt korlátos zárt síkrész területe $\pi \cdot ab$. (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!