

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, 2014. 06. 17.

A. Feladatok

1. Határozza meg: (7 + 7 + 4 pont)

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = ?$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4-x} + \sqrt{4-x}} = ?$ c) $\int_{-1/2}^{1/2} \arcsin x \, dx = ?$

2. Igazolja, hogy minden $0 < x$ értékre $1 + 2 \log x \leq x^2$. (7 pont)

3. Legyen $f(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Adja meg a függvény monotonitási intervallumait, szélsőértékeit (ha vannak), és az értékkészletét. (10 pont)

4. Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola valamely $(a, \frac{1}{a})$ ($a > 0$) pontjába húzott érintő és a koordinátatengelyek egy háromszöget határolnak. Mekkora a háromszög területe? (5 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Definiálja adott függvény Taylor-sorát.
2. Definiálja, mit jelent az, hogy egy függvény differenciálható a b helyen.
3. Mondja ki a differenciálható függvény helyi minimuma és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t.
4. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt.
5. Mondja ki az oszcillációs kritériumot.

C. További kérdések

1. Az $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvényről tudjuk, hogy létezik az $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$ (improprius) integrál. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$? (4 pont)
2. Hányszor differenciálható az $x^n \cdot |x|$ függvény az origóban? (5 pont)
3. Van-e az $y'' + 4y' + 5y = 0$ differenciálegyenletnek olyan megoldása, amely nem konstans, de az egész \mathbb{R} -en korlátos? (4 pont)
4. Igazolja, hogy az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű görbe (ellipszis) által határolt korlátos zárt síkrész területe $\pi \cdot ab$. (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!