

## VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt, 2014. 06. 10.

### A. Feladatok

1. Határozza meg: (9 + 6 + 5 pont)

a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2} = ?$     b)  $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} = ?$     c)  $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} = ?$

2. Igazolja, hogy minden  $0 < x$  értékre  $1 + 2 \log x \leq x^2$ . (8 pont)

3. Adja meg az  $f(x) := \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  függvény deriváltját. Vázlatosan ábrázolja a függvényt. (6 pont)

4. Írja föl az

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

függvény Taylor-sorát az „ $x^4$ ” tagig. (6 pont)

### B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mondja ki a (véges) Taylor-formuláról szóló tételt.

2. Definiálja a Riemann-féle integrálközelítő összegeket és ezek segítségével a Riemann-integrált.

3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú növekedése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(ek)e)t.

4. Mondja ki a L'Hospital szabályt (a „ $\frac{0}{0}$ ” alakot).

5. Mondja ki a függvényt sorozat integrálhatóságáról szóló tételt.

### C. További kérdések

1. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely  $a$  helyen szélsőértéke van, de deriváltja nem vált előjelet. (5 pont)

2. Igazolja vagy cáfolja az alábbi állítást: Ha az  $f$  függvény (folytonos és) differenciálható, akkor minden  $\xi$  értékhez található olyan  $a < \xi < b$  értékek, amelyekre  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$  fennáll. (5 pont)

3. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q+1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Q}, q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e ez a függvény a  $[0, 1]$ -en? (5 pont)

4. Adjon meg rekurzív formulát az  $\int_1^e (\log x)^n dx$  kiszámítására. (5 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!