

VIZSGADOLGOZAT
Differenciál- és integrálszámítás, 2014. 06. 10.

A. Feladatok

1. Határozza meg: (10 + 6 + 4 pont)

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2} = ?$ b) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} = ?$ c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

2. Igazolja, hogy minden $0 < x$ értékre $1 + 2 \log x \leq x^2$. (8 pont)

3. Adja meg az $f(x) := \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ függvény deriváltját. Vázlatosan ábrázolja a függvényt. (6 pont)

4. Írja föl az

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

függvény Taylor-sorát az „ x^4 ” tagig. (6 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mondja ki a (véges) Taylor-formuláról szóló tételt.
2. Definiálja, mit jelent az, hogy egy függvény konvex az I intervallumon.
3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú növekedése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(ek)e)t.
4. Mondja ki a L'Hospital szabályt (a „ $\frac{0}{0}$ ” alakot).
5. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát.

C. További kérdések

1. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely a helyen szélsőértéke van, de deriváltja nem vált előjelet. (7 pont)

2. Igazolja vagy cáfolja az alábbi állítást: Ha $\forall x : f(x) > 0$ és $\int_1^{\infty} f(x) \, dx = \infty$, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

sor divergens. (6 pont)

3. a) Van-e olyan függvény, amely az a helyen nem differenciálható, de a grafikonjának van érintője az $(a, f(a))$ pontban? b) Van-e olyan függvény, amely az a helyen differenciálható, de a grafikonjának nincs érintője az $(a, f(a))$ pontban? c) Van-e olyan függvény, amely az a helyen nem differenciálható, és a grafikonjának sincs érintője az $(a, f(a))$ pontban? (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!