

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2012. 06. 05.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (5 + 7 + 8 pont)

$$\text{a) } \int x \cos^2 x \, dx \quad \text{b) } \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx \quad \text{c) } \int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \, dx$$

Igazolja, hogy minden x értékre $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. (6 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ függvényt! (12 pont)

4. Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$$

sor? Mi az összege? (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
2. Mondja ki a függvénysorozatok határfüggvényének integrálhatóságáról szóló tételt!
3. Mit ért az alatt, hogy az f függvény konkáv az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
4. Mit ért az alatt, hogy az f és g függvények lineárisan függőek az (a, b) intervallumon?
5. Mondja ki (véges) Taylor-formuláról szóló tételt!
6. Mondja ki az ívhossz kiszámításáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Van-e olyan függvény, amelynek minden primitív függvénye páratlan?
2. Adjon példát olyan $[2, 3] \rightarrow [m, M]$ függvényre, amely integrálható, és nem veszi föl szélsőértékeit!
3. Határozza meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$$

határértéket!

4. Konvergens-e az

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x + \sin x}$$

integrál?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!