

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2011. 06. 16.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (6 + 8 pont)

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sin^4 x} \quad \text{b) } \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

2. Differenciálja az

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt! (7 pont)

3. Számolja ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \right)$ határértéket! (6 pont)

4. Diszkutálja és ábrázolja az $x \cdot e^{-1/x}$ függvényt! (11 pont)

5. Számolja ki az $x^2 + y^2 = 8$ és a $2y = x^2$ egyenletű görbék által határolt mindkét korlátos tartomány területét! (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a L'Hospital-szabályt!
2. Definiálja a rektifikálható görbeív fogalmát!
3. Mit ért az alatt, hogy a g függvény konkáv valamely intervallumon?
4. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
5. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a két függvény lineáris függősége és a Wronsky-determinánsuk közti kapcsolatot leíró tétel(e)ket!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Vizsgálja az A/2 feladatban szereplő függvény deriváltja viselkedését az origó közelében! (Folytonos-e, illetve milyen szakadása van?)
2. Az $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy az $\int_1^{\infty} f(x) dx$ improprius integrálja létezik. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?
3. Az f függvényről tudjuk, hogy folytonos a $[-1, 1]$ -en és differenciálható a $(-1; 1)$ -en. Igaz-e, hogy mindig található olyan a, b , $-1 \leq a < 0 < b \leq 1$ számok, amelyekre $f'(0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ fennáll?

4. Legyen f folytonos a $(0, 1)$ -en. vizsgálja az $f_n(x) := \frac{n}{2} \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t) dt$ függvénysorozat konvergenciáját!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!