

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2011. 06. 07.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (8 + 6 pont)

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$$

2. Számolja ki a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) \ln(1-x)$$

határértéket! (7 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az $\frac{1}{x \log x}$ függvényt! (11 pont)

4. Az $y = xe^x$ $0 \leq x \leq 1$ egyenletű görbét megforgatjuk az x tengely körül. Mekkora az így kapott test térfogata? (7 pont)

5. Legyen $\operatorname{tg} x \approx x$, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Adjon becslést a közelítő formula hibájára! (6 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a hányadosfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
2. Mit ért az alatt, hogy az f és g függvények lineárisan függőek az (a, b) intervallumon?
3. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) integrálkritériumot!
4. Mondja ki az integrálhatóság Riemann-féle kritériumát!
5. Definiálja a Darboux-féle alsó és felső összeg, valamint az alsó és felső integrál fogalmát!
6. Definiálja az improprius integrált! (Elég a jobb oldali alapeset.)

C. További kérdések (3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban) az oszcillációs kritérium tagadását! („Az $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ függvény nem integrálható ...”)
2. Tudjuk, hogy f Riemann-integrálható a $[-1, 1]$ intervallumon és legyen

$$I(x) := \int_{-1}^x f(t) dt.$$

Állíthatjuk-e, hogy I differenciálható a 0 pontban és $I'(0) = f(0)$?

3. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q-1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q > 0 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e ez a függvény a $[0, 2]$ intervallumon?

4. Adjon meg olyan függvényt, amely a $(0, 1)$ intervallumon folytonos, de végtelen sok pontban nem differenciálható!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!