

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2011. 05. 31.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (6 + 7 + 9 pont)

a) $\int x \cos^2 x \, dx$ b) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx$ c) $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \, dx$

2. Diskutálja és ábrázolja az xe^{-x^2} függvényt! (12 pont)
3. Vizsgálja az $\arcsin(\sin x)$ függvény differenciálhatóságát! (6 pont)
4. Igazolja, hogy $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ minden x értékre! (5 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
2. Mondja ki a hatványsor differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mondja ki a középérték-tétel Lagrange-féle alakját!
4. Mondja ki az integrálhatóság Riemann-féle kritériumát!
5. Mondja ki a Newton–Leibniz-formulát!
6. Mondja ki az ívhossz kiszámításáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Adjon példát olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely egyetlen pontban differenciálható, másutt nem folytonos!
2. Adjon példát olyan $[2, 3] \rightarrow [m, M]$ függvényre, amely integrálható, és nem veszi föl szélsőértékeit!
3. Határozza meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx$$

határértéket!

4. Igazolja, hogy bármely $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) polinomhoz található olyan $0 < q < 1$ szám, amelyre

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 = p'(q).$$

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!