

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2011. 05. 24.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (6 + 8 pont)

$$\text{a) } \int \frac{x dx}{\sin^2 x} \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$$

2. Számolja ki a $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$ integrált! (8 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az $\frac{1}{\log(x-1)}$ függvényt! (12 pont)

4. Határozza meg a $\cos^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ sorozat határértékét! (6 pont)

5. Határozza meg az $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ függvény 0 körüli Taylor-sorában az „ x^3 ” tag együtthatóját! (5 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen helyi maximuma van?
2. Mondja ki a függvény szigorú monoton növekedése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t!
3. Mondja ki a Taylor-tételt!
4. Mondja ki a Darboux-tételt!
5. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a függvénysorozat integrálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Van-e primitív függvénye f -nek az egész \mathbb{R} -en?

2. Az $f; [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ függvényről tudjuk, hogy létezik az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrálja. Igaz-e, hogy a $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ sor szükségképpen konvergens?

3. Adjon példát olyan függvényre, amelynek valamely pontban van szélsőértéke, ott differenciálható, de a deriváltja nem jelváltó!

4. Az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy folytonos, és azt is, hogy $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$. Állíthatjuk-e, hogy f szükségképpen konstans?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!