

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2010. 06. 22.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (8 + 9 pont)

$$\text{a) } \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x} \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx$$

2. Az $f(x) := xe^x$, $0 \leq x \leq 1$ függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Számolja ki az így kapott forgástest térfogatát! (8 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az $\frac{1}{x \log x}$ függvényt! (13 pont)

4. Hol konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$$

sor? Mi az összege? (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény konkáv az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
2. Mondja ki a középérték-tétel Lagrange-féle alakját!
3. Definiálja az improprius integrál fogalmát! (Elég a „jobboldali alapeset”.)
4. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
5. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Definiálja adott függvény (0 körüli) Taylor-sorát!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Van-e olyan függvény, aminek mindegyik primitív függvénye páratlan?
2. Igaz-e, hogy ha $|f|$ integrálható valamely $[a, b]$ -n, akkor szükségképpen f is az?
3. Mutasson példát olyan függvényre, amely valamely a helyen egyszer differenciálható, de kétszer nem és másutt nem is folytonos!
4. Konvergens-e az

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \sin x}$$

integrál?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!