

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, 2010. 06. 14.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (7 + 7 pont)

$$\text{a) } \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} \quad \text{b) } \int \log^2 x \, dx$$

2. Számolja ki az $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)}$ integrált! (8 pont)

3. Diskutálja és ábrázolja az $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ függvényt! (14 pont)

4. Határozza meg az $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ görbe és a koordinátatengelyek által határolt korlátos zárt síkrész területét! (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f és g függvények lineárisan függetlenek az I intervallumon?
2. Mondja ki a függvény szigorú monoton csökkenése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (Szükséges, illetve elégséges feltételek.)
3. Definiálja a rektifikálható görbeív fogalmát!
4. Mondja ki a Newton–Leibniz-formuláról szóló tételt!
5. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) integrálkritériumot!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Az f függvényről tudjuk, hogy valamely a helyen folytonos. Igaz-e, hogy a $g(x) := (x - a) \cdot f(x)$ függvény szükségképpen differenciálható az a helyen?
2. Az f függvényről tudjuk, hogy differenciálható és páros \mathbb{R} -en. Igaz-e, hogy a deriváltja szükségképpen páratlan?
3. Az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény olyan, hogy $\int_0^1 f^2(x) \, dx = 0$. Igaz-e, hogy az f csak konstansfüggvény lehet?
4. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q-1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p, q \text{ relatív prím egészek, } q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e f a $[0, 2]$ intervallumon?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!