

VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2010. 06. 08.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (6 + 11 pont)

$$\text{a) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x} \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\cos x}$$

2. Számolja ki az $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$ integrált! (8 pont)

3. Diskutálja és ábrázolja az $\frac{1}{\log(x-1)}$ függvényt! (13 pont)

4. Határozza meg az $f(x) := \log(1+2x)$ függvény Taylor-sorát! Hol konvergens a sor? (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény differenciálható a b pontban?
2. Mondja ki a függvény monoton csökkenése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (Szükséges, illetve elégséges feltételek.)
3. Definiálja adott függvény improprius integrálja fogalmát! (Elég a „jobboldali alapeset”.)
4. Mondja ki a (véges) Taylor-formuláról szóló tételt!
5. Mondja ki a Lagrange-féle középérték-tételt!
6. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Mutasson példát függvényre, melyre $f'(2) = 0$, de a 2-ben a függvénynek nincsen szélsőértéke!
2. Az f és a g függvényekről tudjuk, hogy impropriusan integrálhatók az $[1, \infty)$ -en. Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ függvény is szükségképpen impropriusan integrálható?
3. A p paraméter mely értékeire igaz, hogy minden $x > -1$ esetén $(1+x)^p \leq 1+px$ fennáll?
4. Legyen $f : [1, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ egy nemnegatív függvény, amelyről tudjuk, hogy az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál létezik. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?
Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!