

## VIZSGADOLGOZAT

Differenciál- és integrálszámítás, emelt szint, 2010. 06. 01.

### A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat! (6 + 6 pont)

$$\text{a) } \int (\sin x)(\log \operatorname{tg} x) dx \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$$

2. Számolja ki az  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$  integrált! (11 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az  $x \cdot e^{-1/x^2}$  függvényt! A szakadási pontokban értelmezhető-e úgy a függvény, hogy a kapott kiterjesztés mindenütt differenciálható legyen? (15 pont)

4. Határozza meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n$$

határértéket! (7 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény konkáv az  $I$  intervallumon?
2. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát!
3. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  és a  $g$  függvények lineárisan függőek az  $I$  intervallumon?
4. Mondja ki a (véges) Taylor-formuláról szóló tételt!
5. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Definiálja a rektifikálható ív fogalmát!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Fogalmazza meg az oszcillációs kritériumot tagadó alakban! (Az  $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$  függvény nem integrálható ...)
2. Konstruáljon olyan függvényt, amely valamely pontban egyszer differenciálható, de kétszer nem!
3. Legyen  $p(x)$  egy legalább másodfokú polinom. Igaz-e, hogy mindig van olyan  $\xi \in [-1, 1]$  pont, amelyre  $2p'(\xi) < p(1) - p(-1)$  fennáll?
4. Legyen  $f : [1, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  egy nemnegatív függvény, amelyről tudjuk, hogy az  $\int_1^\infty f(x) dx$  improprius integrál létezik. Igaz-e, hogy a  $\sum f(n)$  sor szükségképpen konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!