

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2010. 01. 19. emelt szint

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \sqrt{\arcsin(x + 3 - |x + 2|)}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (7 + 7 pont)

a) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$ b) $\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x} \quad (x \rightarrow 0)$

- Hol konvergens az

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x > -1)$$

függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Ábrázolja a határfüggvényt! (8 pont)

- Hol konvergens az alábbi hatványsor? (8 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$$

- Adjon meg (minél bővebb) olyan intervallumot, ahol az $f_n(x) := \sin \frac{x}{n}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens! (8 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Definiálja a sorozat torlódási pontja fogalmát! (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
- Definiálja adott számhalmaz infimumát! (Formalizált definíciót adjon meg.)
- Mondja ki az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!
- Definiálja adott függvény inverzét!
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Hol folytonos az $f(x) := [x] \sin(\pi x)$ függvény?
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium tagadását! (A $\sum a_n$ sor *nem* konvergens ...)
- Az $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy ÉT-án folytonos és hogy $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen egyenletesen is folytonos (az ÉT-án)?
- Az a_n pozitív tagú sorozatrol tudjuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0,314$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!