

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2010. 01. 12. emelt szint

### A. Feladatok

- Adja meg az  $f(x) := \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Adja meg egy invertálható leszűkítését és ennek inverzét (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (9 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (6 + 8 pont)

a)  $\frac{1}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$       b)  $x(\sqrt{x^2 - 1} + x) \quad (x \rightarrow -\infty)$

- Hol konvergens az  $f_n(x) := e^{n(x-1)}$  függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Adjon meg (minél bővebb) intervallumot, ahol a konvergencia egyenletes! (13 pont)
- Legyen

$$f(x) := \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja! (9 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért azalatt, hogy az  $f$  függvény baloldali határértéke az  $a$  helyen  $\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a hányadoskritériumot! (Elegendő két alakban.)
- Definiálja az  $a^x$  ( $0 < a < 1$ ) függvényt!
- Mit ért azalatt, hogy egy sorozat konvergens?
- Mit ért azalatt, hogy az  $f$  függvény az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon egyenletesen folytonos?
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Van-e torlódási pontja a  $\sin^{2009} n + \cos^{2010} n$  sorozatnak?
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, hogy az  $a_n$  sorozat *nem* konvergens!
- Adjon meg olyan függvényt, amely a  $(0, 1)$  intervallumon Bolzano–Darboux-tulajdonságú, de nem folytonos!
- Igaz-e, hogy ha a  $\sum a_n$  sor abszolút konvergens, akkor szükségképpen  $na_n \rightarrow 0$  is fennáll?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!