

VIZSGADOLGOZAT
Bevezetés az analízisbe, 2010. 01. 12.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (7 + 9 pont)

a) $\frac{1}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$ b) $x(\sqrt{x^2 - 1} + x) \quad (x \rightarrow -\infty)$

- Hol konvergens az $f_n(x) := e^{n(x-1)}$ függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? (11 pont)
- Legyen

$$f(x) := \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja! (11 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény baloldali határértéke az a helyen ∞ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a hányadoskritériumot! (Elegendő két alakban.)
- Definiálja az a^x ($0 < a < 1$) függvényt!
- Mit ért az alatt, hogy egy sorozat konvergens?
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az $\langle a, b \rangle$ intervallumon egyenletesen folytonos?
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt!

C. További kérdések (3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Van-e torlódási pontja a $\sin^{2009} n + \cos^{2010} n$ sorozatnak?
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, hogy az a_n sorozat *nem* konvergens!
- Adjon meg olyan függvényt, amely a $(0, 1)$ intervallumon Bolzano–Darboux-tulajdonságú, de nem folytonos!
- Igaz-e, hogy ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor szükségképpen $na_n \rightarrow 0$ is fennáll?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!