

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2010. 01. 05.

### A. Feladatok

- Adja meg az  $f(x) := \arcsin \log_{1/2}(x^2 - 1)$  függvény értelmezési tartományát és értékészletét! Adja meg egy invertálható leszűkítést és ennek inverzét! (9 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (6 + 7 pont)

$$\text{a) } \sqrt[n]{\frac{5^n - n \cdot 3^n}{3n^2 + 2n}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \quad (x \rightarrow 4)$$

- Hol konvergens a  $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{1/2} x)^n$  függvénysor? Mi az összege? (9 pont)

- Legyen

$$f(x) := \frac{3^{1/(1-x)}}{\sqrt{x^2 + 2} + x}.$$

Vizsgálja a függvény folytonosságát; adja meg a jellegzetes limeseit! Vázlatosan ábrázolja! (14 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény az  $a$  helyen folytonos? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
- Mondja ki a számsorokra vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!
- Mit ért az alatt, hogy egy sorozat konvergens?
- Mit ért az alatt, hogy az  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Mondja ki a konvergens numerikus sorral majorált függvénysorról szóló (Riemann-féle) tételt!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Az  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  konvergens sorozatokról tudjuk, hogy minden  $n$ -re  $a_n < b_n$ . Lehet-e  $a \geq b$ ?
- Tudjuk, hogy  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  minden  $x \in [a, b]$  értékre. Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, hogy a konvergencia *nem* egyenletes!
- Van-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$  sornak olyan átrendezése, amelynek összege éppen 2010?
- Az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényről tudjuk, hogy periodikus és  $\mathbb{R}$ -en folytonos. Igaz-e, hogy szükségképpen egyenletesen is folytonos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!