

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2010. 01. 05.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \arcsin \log_{1/2}(x^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (8 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (7 + 9 pont)

$$\text{a) } \sqrt[n]{\frac{5^n - n \cdot 3^n}{3n^2 + 2n}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \quad (x \rightarrow 4)$$

- Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{1/2} x)^n$ függvénysor? Mi az összege? (11 pont)
- Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{ha } |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

Hol folytonos ez a függvény? Vázlatosan ábrázolja! (10 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az a helyen folytonos? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
- Mondja ki a számsorokra vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!
- Mit ért az alatt, hogy egy sorozat konvergens?
- Mit ért az alatt, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Mondja ki a konvergens numerikus sorral majorált függvénysorról szóló (Riemann-féle) tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Az $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ konvergens sorozatokról tudjuk, hogy minden n -re $a_n < b_n$. Lehet-e $a \geq b$?
- Tudjuk, hogy $f_n(x) \rightarrow f(x)$ minden $x \in [a, b]$ értékre. Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, hogy a konvergencia *nem* egyenletes!
- Van-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ sornak olyan átrendezése, amelynek összege éppen 2010?
- Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy periodikus és \mathbb{R} -en folytonos. Igaz-e, hogy szükségképpen egyenletesen is folytonos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!