

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2009. 12. 30.
emelt szint

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \arcsin \frac{x+3}{x+2}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Hol invertálható a függvény? Adja meg az inverzét! (12 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (8 + 6 pont)

a) $\frac{x + \sin 2x}{3x + \sqrt[3]{x}}$ ($x \rightarrow 0$) b) $\sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 - 3n - 4}$ ($n \rightarrow \infty$)

- Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^3} x^n$$

hatványsor? (8 pont)

- Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1 - 2^{\operatorname{tg} x}}$$

Hol folytonos ez a függvény? Hol monoton? Adja meg az ÉK.ét, jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (11 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen a határértéke $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Definiálja egy függvény inverzét!
- Mit ért az alatt, hogy az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon?
- Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
- Definiálja a $H \subset \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$ halmaz infimumát (formalizált definíciót adjon meg)!
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Fogalmazza meg a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumban szereplő feltétel tagadását! (Egy sorozat akkor és csak akkor nem konvergens, ha ...)
- Adjon meg olyan sorozatot, amelynek végtelen sok (különböző) torlódási pontja van!
- Vizsgálja az $x_1 := 1$, $x_{n+1} := \frac{x_n}{4} + 6$ sorozat konvergenciáját!
- Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre valamely a pontban $f(a + \frac{1}{n}) \rightarrow f(a)$ ($n \rightarrow \infty$) teljesül, de f nem folytonos a -ban!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!