

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2009. 12. 22.
emelt szint

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \arcsin \frac{1}{|x|} + \log_2(5 - x^2)$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket! (5 + 8 pont)

$$\text{a) } \frac{n \operatorname{arc} \operatorname{tg} n}{n^2 - 3} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x} \quad (x \rightarrow 0)$$

3. Legyen $f_n(x) := \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Igazolja, hogy a konvergencia egyenletes a $[2, 4]$ intervallumon! (9 pont)
4. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$$

sor? (8 pont)

5. Legyen $f(x) := \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény balról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Értelmezze két sor Cauchy-féle szorzatát!
3. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám torlódási pontja?
4. Mondja ki a gyökkritériumot (elég két alakban)!
5. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
6. Mondja ki a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Adja meg az A/5 feladatban szereplő függvény inverzét (ÉT-t, ÉK-et is)!
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, ha egy függvény nem monoton az ÉT-án!
3. Adjon példát olyan függvényre, amely a $(-1, 2]$ -n folytonos és korlátos, de nem veszi föl szélsőértékeit!
4. Az $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy $f(x) \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow 1^-$. Lehet-e a függvény a $(-1, 1)$ -en egyenletesen folytonos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!