

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2009. 12. 15.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 2x\right)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)
- Határozza meg az alábbi sorozatok határértékeit! (6 + 10 pont)

a) $\frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$ b) $\sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$

- Vizsgálja a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$$

sor konvergenciáját és abszolút konvergenciáját! (10 pont)

- Határozza meg az

$$f_n(x) := \frac{x^n}{1 + x^n}$$

függvénysorozat konvergenciatartományát és határfüggvényét! (10 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen a határértéke a c szám? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a (sorokra vonatkozó) Leibniz-féle kritériumot!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon?
- Mondja ki a hányadoskritériumot! (Elegendő két alakban.)
- Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
- Mit ért arcsin x alatt?

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos az (a, b) intervallumon, akkor ott szükségképpen felveszi maximumát és minimumát is?
- Az (a_n) sorozatról tudjuk, hogy $a_{n+2} - a_n \rightarrow 0$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?
- Van-e a $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2009?
- Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy periodikus és $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen konstans?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!