

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2014. 01. 27.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \sqrt{\arcsin(x+3-|x+2|)}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. (8 pont)
- Számolja ki az alábbi határértékeket! (6 + 7 pont)

a) $\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{1-n} \quad (n \rightarrow \infty)$ b) $\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \quad (x \rightarrow 4)$

- Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+2^{1/(1-x)}}$$

Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt. (10 pont)

- Konvergens-e, abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n}$$

sor? (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az a -ban balról folytonos? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mondja ki a Bolzano–Weierstass tételt.
- Hogyan értelmeztük valamely számhalmaz infimumát? (Formális definíciót adjon meg).
- Mondja ki a folytonos függvény inverzéről szóló tételt.
- Mondja ki a sorozatokra vonatkozó Cauchy-kritériumot.

C. További kérdések

- Hol konvergens az

$$x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - - + + \dots$$

hatványsor? Mi az összege? (6 pont)

- Fogalmazza meg (pozitív állító formában), mit jelent az, ha egy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az (a, b) intervallumon nem egyenletesen folytonos. (5 pont)
- Az alábbi állítások közül melyikből következik valamelyik másik? (6 lehetőséget vizsgálhat) a) Az f függvény folytonos a $[0, 1]$ zárt intervallumon. b) Az f függvény monoton a $[0, 1]$ zárt intervallumon. c) Az f függvény korlátos a $[0, 1]$ zárt intervallumon. (9 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!