

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2014. 01. 21.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \arcsin \frac{x+3}{x+2}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Hol folytonos ez a függvény? (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket! (5 + 7 pont)

$$\text{a) } \frac{n \operatorname{arctg} n}{x \cdot n^2 - 3} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x} \quad (x \rightarrow 0)$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$$

Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt. Adja meg az f^{-1} inverzfüggvényt, vázlatosan ábrázolja az $f(f^{-1})$ és az $f^{-1}(f)$ függvényeket. (10 pont)

4. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) x^n$ hatványsor? Adjon meg minél bővebb olyan intervallumokat, ahol a konvergencia egyenletes. (11 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke az a -ban jobbról $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg.)
2. Mondja ki a hányadoskritériumot (az egyik alak elegendő).
3. Hogyan értelmeztük valamely számhalmaz infimumát? (Formális definíciót adjon meg).
4. Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt.
5. Mit ért az alatt, hogy egy függvénynek az I intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonsága van?

C. További kérdések

1. Tudjuk, hogy a_n pozitív tagú konvergens sorozat. Melyik *lehet* igaz, melyik *biztosan* igaz az alábbiak közül: Az $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ sorozat a) konvergens; b) konvergens az 1-hez. (6 pont)
2. Mutasson példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, ami végtelen sok pontban folytonos és végtelen sok pontban nem folytonos. (4 pont)
3. Igazolja, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény periodikus és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$, akkor f egyenletesen folytonos \mathbb{R} -en. (4 pont)
4. Legyen $a_1 > 0$ és $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen a) nem lehet konvergens; b) ∞ -divergens? (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!