

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2014. 01. 21.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \arcsin \frac{x+3}{x+2}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Hol folytonos ez a függvény? (8 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket! (5 + 8 pont)

$$\text{a) } \frac{n \arctg n}{n^2 - 3} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/x} \quad (x \rightarrow 0)$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$$

Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt. (10 pont)

4. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$$

sor? (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke az a -ban jobbról $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg.)
2. Mondja ki a hányadoskritériumot (az egyik alak elegendő).
3. Hogyan értelmeztük valamely számhalmaz infimumát? (Formális definíciót adjon meg).
4. Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt.
5. Mit ért az alatt, hogy egy függvénynek az I intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonsága van?

C. További kérdések

1. Tudjuk, hogy a_n pozitív tagú konvergens sorozat. Melyik *lehet* igaz, melyik *biztosan* igaz az alábbiak közül: Az $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ sorozat a) konvergens; b) konvergens az 1-hez. (6 pont)
2. Fogalmazza meg (pozitív állító formában) a Cauchy-kritérium tagadó változatát: Az a_n sorozat *nem konvergens* akkor és csak akkor, ha ... (4 pont)
3. Mutasson példát olyan mindenütt értelmezett függvényre, ami a) az 1-ben és a 2-ben nem folytonos, másutt igen; b) az 1-ben és a 2-ben folytonos, másutt nem. (5 pont)
4. Legyen $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ két konvergens sorozat. Lehetséges-e, hogy $\forall n : a_n < b_n$ és $a \geq b$? (5 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!