

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2014. 01. 14.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \sqrt{|x-2| - |x-5|}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Hol folytonos ez a függvény? (6 pont)

2. Határozza meg az alábbi határértéket: (7 + 8 pont)

$$\text{a) } \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{tg} x} \quad (x \rightarrow 0)$$

3. Legyen $f(x) := \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (11 pont)

4. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

sor? (8 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke a $-\infty$ -ben ℓ ? (Mindkét definíciót adja meg.)

2. Mondja ki a gyökkritériumot (az egyik alak elegendő).

3. Definiálja két sor szorzatsorát.

4. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-kritériumot.

5. Mit ért az alatt, hogy egy függvény az I intervallumon egyenletesen folytonos?

C. További kérdések

1. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \nu : \exists n > \nu : |a_n - 2| < \varepsilon.$$

Melyik *lehet* igaz, melyik *biztosan* igaz az alábbiak közül: A sorozatnak a 2 szám a) határértéke; b) torlódási pontja; c) alsó korlátja. (6 pont)

2. Mutasson példát arra, hogy két nem folytonos függvény összetétele lehet folytonos. (4 pont)

3. Mutasson példát olyan korlátos sorozatra, amelynek végtelen sok torlódási pontja van. (4 pont)

4. Igazolja, hogy az $x + x^2 + x^3 = 1$ egyenletnek a $[0, 1]$ intervallumon pontosan 1 megoldása van. (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!