

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2014. 01. 07.

### A. Feladatok

- Adja meg az  $f(x) := \sqrt{2 \log_2(x-4) - 2 \log_2(x-5)}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Adja meg a függvény inverzét és ábrázolja az  $f(f^{-1})$  és az  $f^{-1}(f)$  összetett függvényeket! (12 pont)
- Határozza meg az alábbi határértéket: (5 + 7 pont)

a)  $\sqrt[n]{5^n - n \cdot 3^n}$  ( $n \rightarrow \infty$ )      b)  $x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  ( $x \rightarrow -\infty$ )

- Legyen  $f(x) := \arctg \frac{1}{1-x}$ . A jellegzetes határértékek segítségével vázlatosan ábrázolja! (9 pont)
- Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n + 1}$$

hatványsor? (7 pont)

### B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény baloldali határértéke az  $a$  helyen  $-\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot.
- Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt.
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt.
- Definiálja az  $e^x$  függvényt.

### C. További kérdések

- Az  $a_n$  sorozatról tudjuk, hogy

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists \nu : \forall n > \nu : |a_n - 2| < \varepsilon.$$

Melyik *lehet* igaz, melyik *biztosan* igaz az alábbiak közül: A sorozat a) korlátos; b) konvergens (2-höz); c) állandó. (6 pont)

- Van-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{7/3}}$  sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2014? (4 pont)
- Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak nincs  $\infty$ -divergens részsorozata, akkor felülről korlátos? (4 pont)
- Mutasson példát olyan függvényre, amely a  $(0, 1)$ -en értelmezett és annak bármely pontja bármely környezetében nem korlátos. (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!