

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, 2014. 01. 07.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \sqrt{2\log_2(x-4) - 2\log_2(x-5)}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. (9 pont)

2. Határozza meg az alábbi határértéket: (6 + 8 pont)

$$\text{a) } \sqrt[n]{5^n - n \cdot 3^n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } x(\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

3. Legyen $f(x) := \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$. A jellegzetes határértékek segítségével vázlatosan ábrázolja! (10 pont)

4. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

sor? (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény baloldali határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot.

3. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt.

4. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt.

5. Definiálja az e^x függvényt.

C. További kérdések

1. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists \nu : \forall n > \nu : |a_n - 2| < \varepsilon.$$

Melyik *lehet* igaz, melyik *biztosan* igaz az alábbiak közül: A sorozat a) korlátos; b) konvergens (2-höz); c) állandó. (6 pont)

2. Van-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{7/3}}$$

sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2014? (5 pont)

3. Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak nincs ∞ -divergens részsorozata, akkor felülről korlátos? (4 pont)

4. Egészítse ki a definíciót: Az $f : C \rightarrow D$ függvény akkor invertálható, ha Az inverzfüggvényre az igaz, hogy minden $x \in \dots$ esetén $f^{-1}(f(x)) = \dots$ (5 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!