

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, matek alapszak, 2013. 12. 17.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \arccos \log_{1/2}(2 - x^2)$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (8 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (2×6 pont)

$$\text{a) } \frac{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^5} + \frac{5}{n^3} - \frac{1}{n^2}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x} \quad (x \rightarrow 0)$$

- Adja meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+2}}$$

sor konvergenciaintervallumát! (8 pont)

- Legyen $f_n(x) := \arctg(nx)$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Ábrázolja az f_4 és az f függvényeket. (12 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az a helyen folytonos? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Definiálja a mértani sor fogalmát és mondja ki a konvergenciájáról szóló tételt.
- Definiálja adott függvény inverzét.
- Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságáról szóló tételt.
- Mondja ki a számsorozatok konvergenciája és korlátossága közötti kapcsolatot leíró tétel(ek)t.

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 6 pont)

- Adjon meg olyan számsorozatot, amelynek pontosan 5 torlódási pontja van.
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban) a Cauchy-kriérium „tagadó” változatát: az a_n sorozat *nem* konvergens akkor és csak akkor, ha ...
- Egyenletesen konvergens-e az A/4 feladatban szereplő függvénysorozat a) a $[-1, 1]$ intervallumon; b) az $[1, 3]$ intervallumon?
- Legyen $x_0 = 1$, $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$. Konvergens-e ez a sorozat?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!