

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2011. 01. 25.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \sqrt{\ln \sin x} + \ln(3 - x^2)$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (7 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (6 + 7 pont)

$$\text{a) } \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad (x \rightarrow 0)$$

- Konvergens-e az $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{a_n}{4} + 6$ sorozat? (7 pont)

- Hol konvergens az

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x > -1)$$

függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Ábrázolja a határfüggvényt! Egyenletes-e a konvergencia a $[0, 1]$ intervallumon? (11 pont)

- Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{1/2} x)^n$$

függvénysor? Mi az összege? (7 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Definiálja két sor Cauchy-szorzatát!
- Mondja ki a monoton függvények féloldali határértékeiről szóló tételt!
- Definiálja az e^x függvényt!
- Mondja ki az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!
- Definiálja adott függvény inverzét!
- Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Hol folytonos az $f(x) := [x] \sin(\pi x)$ függvény?
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), a sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium tagadását! (A $\sum a_n$ sor *nem* konvergens ...)
- Az $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy ÉT-án folytonos és hogy $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen egyenletesen is folytonos (az ÉT-án)?
- Az a_n pozitív tagú sorozatrol tudjuk, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0,314$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!