

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2011. 01. 18.

### A. Feladatok

1. Adja meg az  $f(x) := \sqrt{|x-2| - |x-5|}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! hol folytonos ez a függvény? (7 pont)

2. Határozza meg az alábbi határértéket: (6 + 7 + 8 pont)

a)  $\sqrt[3]{1-n^3} + n \quad (n \rightarrow \infty)$       b)  $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$       c)  $\frac{\cos x^2 - 1}{x^3 \operatorname{tg} x} \quad (x \rightarrow 0)$

3. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}}{n^n}$$

sor? (8 pont)

4. legyen  $f(x) := \log_2 \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ . Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (9 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény a  $+\infty$ -ben  $c$ -hez tart felülről? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki a Leibniz-kritériumot!
3. Mit ért az alatt, hogy az  $f_n$  függvényt sorozat egyenletesen konvergál az  $I$  intervallumon?
4. mondja ki a (sorokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!
5. Definiálja a sorozat torlódási pontja fogalmát!
6. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Legyen az  $f$  függvény értelmezve az  $a$  pont egy környezetében. Mit jelent az, hogy  $f$  nem folytonos  $a$ -ban? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
2. Van-e a  $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$  sornak olyan átrendezése, melynek összege 2011?
3. Egy függvényről tudjuk, hogy a  $(0, \infty)$  félegyenesen folytonos, monoton növekvő és korlátos. Igazolja, hogy egyenletesen is folytonos!
4. Igaz-e, hogy ha  $n \cdot a_n \rightarrow 0$ , akkor a  $\sum a_n^2$  sor szükségképpen konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!