

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2011. 01. 11.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \sqrt{2 \log_2(x-4) - 2 \log_2(x-5)}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Adja meg a függvény inverzét és ábrázolja az $f(f^{-1})$ és az $f^{-1}(f)$ összetett függvényeket! (12 pont)
- Határozza meg az alábbi határértéket: (6 + 7 pont)

a) $\sqrt[n]{5^n - n \cdot 3^n}$ ($n \rightarrow \infty$) b) $x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ ($x \rightarrow -\infty$)

- Határozza meg a következő sorok összegét: (2×6 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

- Egyenletesen konvergens-e az $\arctg(nx)$ függvénysorozat az $[\frac{1}{2010}, 2011)$ intervallumon? Mi a határfüggvénye? (8 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a rendőr-elvet!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon?
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az I intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Definiálja az $\arcsin x$ függvényt!
- Mondja ki a feltételesen konvergens sorok átrendezéséről szóló tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Legyen az f függvény értelmezve az a pont egy környezetében. Mit jelent az, hogy f nem folytonos a -ban? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
- Tudjuk, hogy minden n értékre $a_n \geq 0$ és $\sqrt[n]{a_n} < 1$ teljesülnek. Igaz-e, hogy a $\sum a_n$ sor szükségképpen konvergens?
- Igaz-e, hogy ha egy sorozatnak nincs ∞ -divergens részsorozata, akkor felülről korlátos?
- Mutasson példát olyan függvényre, amely a $(0, 1)$ -en értelmezett és annak bármely pontja bármely környezetében nem korlátos!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!