

## VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2011. 01. 04.

### A. Feladatok

1. Adja meg az  $f(x) := \sqrt{\log \frac{x+3}{x-3}}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Adja meg a függvény inverzét és ábrázolja az  $f(f^{-1})$  és az  $f^{-1}(f)$  összetett függvényeket! (12 pont)

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékeit: ( $2 \times 6$  pont)

$$\text{a) } \sqrt[n]{1^n + 2^n - 4^n + 5^n} \quad \text{b) } \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n$$

3. Legyen  $f(x) := \arctg \frac{1}{1-x}$ . A jellegzetes határértékek segítségével vázlatosan ábrázolja! (12 pont)

4. Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{2^n + 1}$$

hatványsor? (9 pont)

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke az  $a$  szám? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
3. Mondja ki a gyökkritériumot! (Két alakban elegendő.)
4. Mondja ki a folytonos függvény inverzére vonatkozó tételt!
5. Definiálja az  $e^x$  függvényt!
6. Mondja ki a hatványsorok egyenletes konvergenciájáról szóló tételt!

### C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha az  $f$  és  $g(f)$  függvények folytonosak, akkor a  $g$  függvény is szükségképpen folytonos?
2. Van-e torlódási pontja az  $a_n := (\sin n + \cos n)^{100} \cdot \arctg n$  sorozatnak?
3. Van-e olyan  $p_n(x)$  polinomsorozat, amely a  $[-1, 1]$  intervallumon egyenletesen konvergál a  $\operatorname{sgn} x$  függvényhez?
4. Igaz-e, hogy bármely  $0 \leq a_n \rightarrow 0$  sorozat esetén a  $\sum (-1)^n a_n$  sor is konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!